Über eine neue Klasse von Mittelwerten

Von LÁSZLÓ LOSONCZI in Debrecen

§ 1. Einleitung

Die bekannte Minkowskische Ungleichung behauptet, daß

$$(1)\qquad \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}{n}\right)^{1/p} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{n}\right)^{1/p} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^p}{n}\right)^{1/p} \quad \text{für} \quad x_i, y_i \in [0, \infty);\ p \geqq 1.$$

Eine Verallgemeinerung von (1) ist die Ungleichung

$$(2)\qquad M_\varphi(k(x_i, y_i))_f \leqq k(M_\psi(x_i)_g, M_\chi(y_i)_h),$$

wobei φ, ψ, χ streng monotone stetige Funktionen, f, g, h positive Funktionen auf einem Intervall I sind, $k: I \times I \to I$ und

$$(3)\qquad M_\varphi(x_1, \dots, x_n)_f = M_\varphi(x_i)_f = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}\right).$$

In [11] haben wir (unter geeigneten Bedingungen) notwendige und hinreichende Bedingungen für (2) gegeben. Ebenda haben wir spezielle Ungleichungen vom Typ (2) untersucht (s. noch [4], [5], [8]).

In dieser Arbeit werden die allgemeineren Mittelwerte

$$(4)\qquad M_\varphi(x_1, \dots, x_n)_{[f_1, \dots, f_n]} = M_\varphi(x_i)_{f_i} = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)}\right)$$

studiert, wobei $f_1, f_2, \dots$ positive Funktionen und φ eine streng monotone stetige Funktion sind. In § 2 geben wir (unter gewissen Voraussetzungen) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ungleichung

$$M_\varphi(k(x_i, y_i))_{f_i} \leqq k(M_\psi(x_i)_{g_i}, M_\chi(y_i)_{h_i}).$$

In § 3 lösen wir das Gleichheitsproblem der Mittelwerte (4), während wir in § 4 alle quasihomogenen Mittelwerte vom Typ (4) bestimmen.

§ 2. Eine allgemeine Ungleichung

Es sei I ein beliebiges Intervall, R bzw. R_+ die Mengen der reellen bzw. positiven reellen Zahlen. Der Kürze halber führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$Q(I)=\{f|f:I\to R_+\}$,

$D(I)=\{\varphi|\varphi:I\to R,\ \varphi$ differenzierbar auf $I,\ \varphi'(x)\neq 0$ für $x\in I\}$,

$D(I^2)=\{k|k:I\times I\to I,\ k$ total differenzierbar auf $I\times I\}$.

Liegt φ in $D(I)$, so ist φ streng monoton.

Satz 1. *Es seien* $\varphi, \psi, \chi\in D(I)$, $f_j, g_j, h_j\in Q(I)$ $(j=1, 2, \ldots)$, $k\in D(I^2)$. *Wir setzen ferner voraus, daß*

(A) *die Reihen* $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$, $\sum_{j=1}^{\infty} h_j(x)$ *für* $x\in I$ *divergent sind,*

(B) *die (endlichen) Grenzfunktionen*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{m} f_j(k(t,s))}{\sum_{j=1}^{m} g_j(t)}=G(t,s),\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{m} f_j(k(t,s))}{\sum_{j=1}^{m} h_j(s)}=H(t,s)$$

für $t, s\in I$ *existieren. Die Ungleichung*

$$M_\varphi(k(x_i, y_i))_{f_i}\leqq k(M_\psi(x_i)_{g_i}, M_\chi(y_i)_{h_i}) \tag{5}$$

$(x_i, y_i\in I;\ n=2, 3, \ldots)$ *gilt dann und nur dann, wenn die Ungleichungen*

$$\frac{\varphi(k(u,v))-\varphi(k(t,s))}{\varphi'(k(t,s))}f_i(k(u,v))\leqq \tag{6}$$

$$\leqq\frac{\psi(u)-\psi(t)}{\psi'(t)}g_i(u)G(t,s)k_t(t,s)+\frac{\chi(v)-\chi(s)}{\chi'(s)}h_i(v)H(t,s)k_s(t,s)$$

für alle $u, v, t, s\in I$ $(i=1, 2, \ldots)$ *erfüllt sind.*

Beweis. *Notwendigkeit.* Substituieren wir in (5) $n\geqq i$; $x_i=u$, $x_1=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots=x_n=t$; $y_i=v$, $y_1=\cdots=y_{i-1}=y_{i+1}=\cdots=y_n=s$. Ist φ eine wachsende Funktion, so erhalten wir

$$f_i(k(u,v))\,[\varphi(k(u,v))-\varphi(k(T_n,S_n))]\leqq \tag{7}$$

$$\leqq\sum_{j=1}^{n}{}' f_j(k(t,s))\,[\varphi(k(T_n,S_n))-\varphi(k(t,s))],$$

wo

$$(8)\qquad T_n = \psi^{-1}\left(\frac{g_i(u)\psi(u)+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' g_j(t)\psi(t)}{g_i(u)+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' g_j(t)}\right),$$

$$S_n = \chi^{-1}\left(\frac{h_i(v)\chi(v)+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' h_j(s)\chi(s)}{h_i(v)+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' h_j(s)}\right)$$

und $\sum\limits_{j=1}^{n}{}' a_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j - a_i$. Da $\varphi(x)$ und $k(t, s)$ differenzierbare Funktionen sind, gilt:

$$(9)\qquad \varphi(k(T_n, S_n)) - \varphi(k(t, s)) =$$
$$= [\varphi'(k(t, s)) + \omega_1][(k_t(t, s)+\omega_2)(T_n - t) + (k_s(t, s)+\omega_3)(S_n - s)],$$

wo $\omega_i \to 0$ $(i=1, 2, 3)$ für $(T_n, S_n) \to (t, s)$. Wegen der Bedingung (A) hat man $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = t$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$, die Funktionen ω_i genügen also der Relation $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_i = 0$ $(i=1, 2, 3)$.

Es sei erstens $u \neq t$, dann ist $T_n \neq t$ und

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty} (T_n - t) \sum_{j=1}^{n}{}' f_j(k(t, s)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{g_i(u) \sum\limits_{j=1}^{n}{}' f_j(k(t, s))}{g_i(u) + \sum\limits_{j=1}^{n}{}' g_j(t)} \cdot \frac{\psi(u)-\psi(t)}{\dfrac{\psi(T_n)-\psi(t)}{T_n - t}} = \frac{\psi(u)-\psi(t)}{\psi'(t)} G(t, s) g_i(u).$$

Für $u = t$ ist diese Limesrelation offenbar richtig. Genauso erhalten wir, daß

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} (S_n - s) \sum_{j=1}^{n}{}' f_j(k(t, s)) = \frac{\chi(v)-\chi(s)}{\chi'(s)} H(t, s) h_i(v)$$

gilt. Auf Grund von (9), (10), (11) folgt (6) aus (7) mit $n \to \infty$. Im Falle einer abnehmenden Funktion φ verläuft der Beweis ebenso.

Hinlänglichkeit. Setzen wir in (6) nacheinander

$$u = x_i, \quad v = y_i, \quad t = M_\psi(x_i)_{g_i}, \quad s = M_\chi(y_i)_{h_i} \qquad (i=1, \dots, n)$$

und addieren die gewonnenen Ungleichungen, so erhalten wir

$$(12)\qquad \frac{\varphi(M_\varphi(k(x_i, y_i))_{f_i}) - \varphi(k(t, s))}{\varphi'(k(t, s))} \leqq 0,$$

woraus (5) folgt.

Bemerkungen. 1. Steht in (5), (6) $\geqq$ oder $=$ statt $\leqq$, so ist der Satz 1 auch gültig.

2. Es bezeichne E_i die Menge derjenigen (u, v, t, s), für welche in (6) das Gleichheitszeichen besteht. Aus dem Beweis der Hinlänglichkeit kann man einsehen, daß die Gleichheit in (5) genau dann besteht, wenn $(x_i, y_i, t, s)\in E_i$ für $i=1, 2, \ldots, n$ gilt, wobei $t=M_\psi(x_i)_{g_i}$, $s=M_\chi(y_i)_{h_i}$.

3. Mit $k(x, y)\equiv x$ erhalten wir aus dem Satz 1 notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ungleichung

$$M_\varphi(x_i)_{f_i} \leqq M_\psi(x_i)_{g_i} \qquad (x_i\in I;\ n=2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Im Spezialfall $f_i=f$, $g_i=g$ $(i=1, 2, \ldots)$ wurde diese Ungleichung in [6], [7], [10] untersucht.

In Satz 1 kann die Gestalt der Funktionen $G(t, s)$, $H(t, s)$ sehr kompliziert sein. Hier geben wir einen Spezialfall an, bei welchem diese Funktionen einfach ausgerechnet werden können.

Satz 2. *Es seien $\varphi, \psi, \chi\in D(I)$, $f_j, g_j, h_j\in Q(I)$ $(j=1, 2, \ldots)$, $k\in D(I^2)$. Wir setzen ferner voraus, daß die (endlichen) Limesfunktionen*

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), \quad \lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x), \quad \lim_{m\to\infty} h_m(x) = h(x)$$

existieren, und in $Q(I)$ liegen. Die Ungleichung

$$M_\varphi\big(k(x_i, y_i)\big)_{f_i} \leqq k\big(M_\psi(x_i)_{g_i}, M_\chi(y_i)_{h_i}\big)$$

$(x_i, y_i\in I;\ n=2, 3, \ldots)$ gilt genau dann, wenn die Ungleichungen

$$\frac{\varphi\big(k(u, v)\big)-\varphi\big(k(t, s)\big)}{\varphi'\big(k(t, s)\big)} \frac{f_i\big(k(u, v)\big)}{f\big(k(t, s)\big)} \leqq$$

$$\leqq \frac{\psi(u)-\psi(t)}{\psi'(t)} \frac{g_i(u)}{g(t)} k_t(t, s) + \frac{\chi(v)-\chi(s)}{\chi'(s)} \frac{h_i(v)}{h(s)} k_s(t, s)$$

$(u, v, t, s\in I;\ i=1, 2, \ldots)$ erfüllt sind.

Zum Beweis nehmen wir in Betracht, daß nach dem Satz von O. Stolz (siehe z. B. [9]) die Relationen

$$G(t, s) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} f_j\big(k(t, s)\big)}{\sum\limits_{j=1}^{m} g_j(t)} = \lim_{m\to\infty} \frac{f_m\big(k(t, s)\big)}{g_m(t)} = \frac{f\big(k(t, s)\big)}{g(t)},$$

$$H(t, s) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} f_j\big(k(t, s)\big)}{\sum\limits_{j=1}^{m} h_j(s)} = \lim_{m\to\infty} \frac{f_m\big(k(t, s)\big)}{h_m(s)} = \frac{f\big(k(t, s)\big)}{h(s)}$$

gelten. Da die anderen Bedingungen des Satzes 1 erfüllt sind, folgt Satz 2 aus Satz 1.

§ 3. Das Gleichheitsproblem

Wir werden hier das Funktionalgleichungssystem

$$(14) \qquad M_\varphi(x_i)_{f_i} = M_\psi(x_i)_{g_i}$$

lösen, wo $\varphi, \psi \in D(I)$, $f_j, g_j \in Q(I)$ $(j=1, 2, \ldots)$, $x_i \in I$ $(n=2, 3, \ldots)$. Wir setzen ferner voraus, daß

(A_1) die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ für $x \in I$ divergent ist,

(B_1) die (endliche) Grenzfunktion

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} f_j(t)}{\sum_{j=1}^{m} g_j(t)} = G(t) \qquad (t \in I)$$

existiert. Dann gilt der

Satz 3. *Die Gleichheit*

$$(14) \qquad M_\varphi(x_i)_{f_i} = M_\psi(x_i)_{g_i}$$

besteht bei beliebigen $x_i \in I$ $(n=2, 3, \ldots)$ *dann und nur dann, wenn*

$$(15) \qquad \psi(x) = \frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)+d}$$

und

$$(16) \qquad g_i(x) = kf_i(x)\big(c\varphi(x)+d\big) \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

wo a, b, c, d, k *Konstanten sind mit den Einschränkungen*

$$(17) \qquad k(c^2+d^2)(ad-bc) \neq 0 \quad \textit{und}$$

$$(18) \qquad -\frac{d}{c} \notin \varphi(I), \quad \frac{a}{c} \notin \psi(I), \quad \textit{falls} \quad c \neq 0.$$

Hier ist $\varphi(I)$ $\big($bzw. $\psi(I)\big)$ der Wertbereich von φ (bzw. ψ) auf I.

Bemerkung. Im Spezialfall $f_j(x)=f(x)$, $g_j(x)=g(x)$ $(j=1, 2, \ldots)$ wurde dieser Satz in [3] (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) und in [2] bewiesen.

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß (14) dann und nur dann gilt, wenn die Gleichungen

$$(19) \qquad f_i(u)\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{\varphi'(t)} = g_i(u)\frac{\psi(u)-\psi(t)}{\psi'(t)}\,G(t) \qquad (u, t \in I,\ i=1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind. Setzen wir in (19) $t = t_0 \in I$, so erhalten wir

$$(20) \qquad f_i(u)\,\Phi(u) = g\ (u)\,\Psi(u)\,G(t_0)$$

mit

$$\Phi(u) = \frac{\varphi(u)-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \Psi(u) = \frac{\psi(u)-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}. \tag{21}$$

Auf Grund von (20) wird

$$G(t)\Phi(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} f_j(t)\Phi(t)}{\sum_{j=1}^{m} g_j(t)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} g_j(t)\Psi(t)G(t_0)}{\sum_{j=1}^{m} g_j(t)} = \Psi(t)G(t_0). \tag{22}$$

$\big(G(t_0)\neq 0$, da sonst wegen (19) $\varphi(u)\equiv\varphi(t_0)$ was unmöglich ist.$\big)$ Mit Hilfe von (20), (22) ergibt sich aus (19)

$$\frac{\Phi(u)-\Phi(t)}{\Phi'(t)}\Phi(t)\Psi(u) = \frac{\Psi(u)-\Psi(t)}{\Psi'(t)}\Psi(t)\Phi(u) \qquad (u, t\in I). \tag{23}$$

Aus (23) folgt für $u, t\neq t_0$

$$\frac{\Phi(u)-\Phi(t)}{\Phi'(t)}\,\frac{\Phi(t)}{\Phi(u)} = \frac{\Psi(u)-\Psi(t)}{\Psi'(t)}\,\frac{\Psi(t)}{\Psi(u)}.$$

Setzen wir hier $t=t_1\in I$, $t_1\neq t_0$, so wird wegen (21)

$$\psi(u) = \frac{a\varphi(u)+b}{c\varphi(u)+d} \qquad (u\neq t_0), \tag{24}$$

wo die Konstanten a, b, c, d durch $\varphi(t_i)$, $\varphi'(t_i)$, $\psi(t_i)$, $\psi'(t_i)$ $(i=0, 1)$ ausgedrückt werden können. Hier muß

$$c^2+d^2>0, \quad ad-bc\neq 0 \tag{25}$$

gelten, da sonst $\psi(u)$ (eventuell außer $u=t_0$) nirgends endlich bzw. konstant wäre, was unmöglich ist. Auf Grund der Stetigkeit gilt (24) auch für $u=t_0$. Damit ist die Richtigkeit der Formel (15) bewiesen. Im Falle $c\neq 0$ zeigt die Umschreibung

$$\psi(x)-\frac{a}{c} = -\frac{ad-bc}{c^2\varphi(x)+dc}$$

von (15), daß die Bedingung (18) gelten muß.

Setzen wir (15) in (19) zurück, so erhalten wir

$$\frac{g_i(u)}{f_i(u)}\,\frac{1}{c\varphi(u)+d} = \frac{1}{G(t)\big(c\varphi(t)+d\big)} \quad \text{für} \quad u\neq t. \tag{26}$$

Nehmen wir $t=t_0, t_1$ in (26), so ergibt sich

$$\frac{g_i(u)}{f_i(u)}\,\frac{1}{c\varphi(u)+d} = \text{konstant} = k\neq 0 \qquad (u\in I;\ i=1, 2, \dots),$$

d.h. (16) und $\big($wegen (25)$\big)$ (17) sind erfüllt.

Gelten (15), (16), (17), (18), so sieht man leicht, daß die Gleichungen (19) auch gelten.

Damit haben wir den Satz 3 bewiesen.

§ 4. Quasihomogene Mittelwerte

Es sei E eine beliebige Menge und

$$D_E(I) = \{\Omega | \Omega: \quad E \times I \to I\}.$$

Der Mittelwert $M_\varphi(x_i)_{f_i}$ heißt quasihomogen bezüglich der Funktionenfolge $\Omega_i \in D_E(I)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, falls

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\Omega_i(t, x_i))\varphi(\Omega_0(t, x_i))}{\sum_{i=1}^{n} f_i(\Omega_i(t, x_i))}\right) = \Omega_0\left(t, \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)}\right)\right) \tag{27}$$

für alle $t \in E$, $x_i \in I$; $i=1, 2, \ldots, n$; $n=2, 3, \ldots$ erfüllt ist.

Im folgenden Satz werden wir voraussetzen, daß für alle festen $t \in E$, $\Omega_0(t, \cdot) \in D(I)$,

(A_2) die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ $(x \in I)$ divergent ist,

(B_2) die (endliche) Grenzfunktion

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} f_j(\Omega_j(t, x))}{\sum_{j=1}^{m} f_j(x)} = F(t, x)$$

für $t \in E$, $x \in I$ existiert.

Satz 4. *Der Mittelwert $M_\varphi(x_i)_{f_i}$ ist dann und nur dann quasihomogen bezüglich der Funktionenfolge $\Omega_i \in D_E(I)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, wenn die Funktionen φ, f_i dem Funktionalgleichungssystem*

$$\tag{28} \begin{gathered} \varphi(\Omega_0(t, x)) = \frac{a(t)\varphi(x)+b(t)}{c(t)\varphi(x)+d(t)}, \\ f_i(\Omega_i(t, x)) = k(t) f_i(x)\big(c(t)\varphi(x)+d(t)\big) \qquad (i=1, 2, \ldots) \\ \left\{ k(t)\big(c(t)^2+d(t)^2\big)\big(a(t)d(t)-b(t)c(t)\big) \neq 0, \quad -\frac{d(t)}{c(t)} \notin \varphi(I), \quad \frac{a(t)}{c(t)} \notin \varphi(I) \quad \textit{falls} \quad c(t) \neq 0 \right\} \end{gathered}$$

genügen.

Beweis. Führen wir bei fixem $t \in E$ die Bezeichnungen

$$\psi(x) = \varphi(\Omega_0(t, x)), \quad g_i(x) = f_i(\Omega_i(t, x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

ein, so erhalten wir aus (27)

$$M_\psi(x_i)_{g_i} = M_\varphi(x_i)_{f_i}. \tag{30}$$

Laut Satz 3 besteht (30) genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)+d} \\ g_i(x) &= kf_i(x)\left(c\varphi(x)+d\right) \qquad (i=1, 2, \ldots) \\ &\left(k(c^2+d^2)(ad-bc) \neq 0, \quad -\frac{d}{c} \notin \varphi(I), \quad \frac{a}{c} \notin \psi(I) \text{ falls } c \neq 0\right) \end{aligned} \tag{31}$$

gilt, wo die „Konstanten" a, b, c, d und k noch von dem bisher fix gehaltenen t abhängen. Mit (29) geht so (31) in (28) über, w. z. b. w.

Es seien jetzt $\Omega_0 = tx$, $\Omega_i = t^{r_i}x$ $(r_i \neq 0)$ $(i = 1, 2, \ldots;\ t, x \in (0, \infty) = I)$ und *wir setzen voraus, daß die Funktionen $f_j \in Q(I)$ stetig sind und ferner die Bedingungen* (A_2), (B_2) *(mit den obigen Ω_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$) erfüllen.* Dann gilt der folgende Satz (vgl. [2] Satz 3, wo die Homogenitätsgleichung $M_\varphi(tx_i)_f = tM_\varphi(x_i)_f$ gelöst wurde).

Satz 5. *Der Mittelwert $M_\varphi(x_i)_{f_i}$ ist genau dann quasihomogen bezüglich der Funktionen tx, $t^{r_i}x$ $(r_i \neq 0;\ i = 1, 2, \ldots;\ t, x \in (0, \infty) = I)$ wenn $M_\varphi(x_i)_{f_i}$ von der Gestalt*

$$M_\varphi(x_i)_{f_i} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^{p/r_i} \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^{p/r_i}}\right) \tag{32}$$

oder von der Gestalt

$$M_\varphi(x_i)_{f_i} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^{p/r_i} x_i^a}{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^{p/r_i}}\right)^{1/a} \tag{33}$$

ist, wo $a \neq 0$, p, $k_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ Konstanten sind.

Beweis. Nach dem Satz 4 genügen die Funktionen dem Gleichungssystem

$$\varphi(tx) = \frac{a(t)\varphi(x)+b(t)}{c(t)\varphi(x)+d(t)}, \tag{34}$$

$$f_i(t^{r_i}x) = k(t)f_i(x)\left(c(t)\varphi(x)+d(t)\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

und den Nebenbedingungen

$$k(t)\left(c(t)^2+d(t)^2\right)\left(a(t)d(t)-b(t)c(t)\right)\neq 0, \tag{36}$$
$$-\frac{d(t)}{c(t)}\notin\varphi(I),\quad \frac{a(t)}{c(t)}\notin\varphi(I)\quad\text{falls}\quad c(t)\neq 0.$$

I. Betrachten wir erstens den Fall $c(t)\equiv 0$. Dann erhalten wir aus (34), (36) die Gleichung

$$\varphi(tx)=A(t)\varphi(x)+B(t)\quad\left(x,t\in(0,\infty),\quad A(t)=\frac{a(t)}{d(t)}\neq 0,\quad B(t)=\frac{b(t)}{d(t)}\right). \tag{37}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Funktion $\Phi(x)=\varphi(x)-\varphi(1)$ der Funktionalgleichung

$$\Phi(tx)=\alpha\Phi(t)\Phi(x)+\Phi(t)+\Phi(x) \tag{38}$$

genügt. Wegen der Differenzierbarkeit von φ sind die Lösungen der Gleichung (38) die Funktionen

$$\Phi(x)=a\ln t\quad(\alpha=0),\qquad \Phi(x)=\frac{x^a-1}{\alpha}\quad(\alpha\neq 0)$$

(siehe [1], Seiten 59—61). Daraus folgt, daß

$$\varphi(x)=a\ln x+b\quad\text{oder}\quad\varphi(x)=\frac{1}{\alpha}x^a+b. \tag{39}$$

Mit den Bezeichnungen $t^{r_i}=s$, $k(s^{1/r_i})d(s^{1/r_i})=D_i(s)$ folgt aus (35)

$$f_i(sx)=D_i(s)f_i(x)$$

und wegen der Stetigkeit von f_i wird $f_i(x)=k_i x^{b_i}$ $k_i>0$. Weil $f_i(t^{r_i}x)/f_i(x)$ von i nicht abhängt, so muß $b_i r_i=p$ (konstant) sein und damit ist

$$f_i(x)=k_i x^{p/r_i}\qquad(i=1,2,\ldots). \tag{40}$$

Mit den Funktionen (39), (40) erhalten wir die Mittelwerte (32) und (33).

II. Zweitens untersuchen wir den Fall $c(t)\not\equiv 0$. Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$t^{r_i}=s,\quad k(s^{1/r_i})c(s^{1/r_i})=C_i(s),\quad k(s^{1/r_i})d(s^{1/r_i})=D_i(s)$$

erhalten wir aus (35)

$$f_i(sx)=C_i(s)f_i(x)\varphi(x)+D_i(s)f_i(x)\qquad(s,x\in(0,\infty);\ i=1,2,\ldots). \tag{41}$$

Das Einsetzen $x=1$ zeigt, daß $D_i(s)=\dfrac{f_i(s)}{f_i(1)}-C_i(s)\varphi(1)$

gilt. Setzen wir diese Formel in (41) zurück, dann wird

$$F_i(sx) = C_i(s)F_i(x)(\varphi(x)-\varphi(1))+F_i(s)F_i(x) \quad \left(F_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_i(1)}\right).$$

Wegen der Gleichheit $F_i(sx) = F_i(xs)$ ergibt sich

$$C_i(s)F_i(x)(\varphi(x)-\varphi(1)) = C_i(x)F_i(s)(\varphi(s)-\varphi(1)),$$

d.h. mit $x=2$

$$C_i(s) = A_i F_i(s)(\varphi(s)-\varphi(1)). \tag{42}$$

Hier sind die Konstanten A_i von Null verschieden, da sonst $C_i(s)\equiv 0$ und $c(t)\equiv 0$ wäre. Mit Hilfe der Formel (42) erhalten wir die Gleichung

$$F_i(sx) = F_i(s)F_i(x)+A_i G_i(s)G_i(x), \tag{43}$$

wo $G_i(x) = F_i(x)(\varphi(x)-\varphi(1))$ ist.

Die stetigen Lösungen von (43) können mit wohlbekannten Methoden (siehe [1], S. 196—201) bestimmt werden. Diese Lösungen sind

$$F_i(x) = (\alpha_i x^{a_i}+\beta_i)x^{b_i}, \quad G_i(x) = (\gamma_i x^{a_i}+\delta_i)x^{b_i}; \tag{44}$$

$$F_i(x) = (\alpha_i \ln x+\beta_i)x^{b_i}, \quad G_i(x) = (\gamma_i \ln x+\delta_i)x^{b_i}; \tag{45}$$

$$F_i(x) = (\alpha_i \sin a_i \ln x+\beta_i \cos a_i \ln x)x^{b_i}, \tag{46}$$
$$G_i(x) = (\gamma_i \sin a_i \ln x+\delta_i \cos a_i \ln x)x^{b_i};$$

wo die Konstanten a_i, b_i, α_i, β_i, γ_i, δ_i noch gewisse Relationen erfüllen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Funktionen (45), (46) der Bedingungen

$$F_i(1)=1, \quad G_i(1)=0, \quad F_i(x)>0, \quad G_i(x)\not\equiv 0 \quad \text{für} \quad x\in(0,\infty), \qquad i=1,2,\ldots \tag{47}$$

und der Gleichung (43) gleichzeitig nicht genügen. Aus (44) folgen nach (43), (47) die Relationen $\beta_i = 1-\alpha_i$, $\delta_i = -\gamma_i$, $1\geqq\alpha_i>0$, $\gamma_i\neq 0$, $\alpha_i^2-\alpha_i+A_i\gamma_i^2 = 0$. Wegen $\varphi(x)-\varphi(1) = G_i(x)/F_i(x)$ hängt $G_i(x)/F_i(x)$ nicht von i ab. Dies ist nur dann möglich, wenn $a_i=a\neq 0$, $1\geqq\alpha_i=\alpha>0$, $\gamma_i=\alpha\neq 0$ $(i=1,2,\ldots)$ gilt. Wir erhalten also

$$\varphi(x) = \frac{(\gamma+\alpha\varphi(1))x^a+(1-\alpha)\varphi(1)-\gamma}{\alpha x^a+1-\alpha}, \tag{48}$$

$$f_i(x) = f_i(1)x^{b_i}(\alpha x^a+1-\alpha) \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Da laut Satz 3 die Mittelwerte $M_\varphi(x_i)_{f_i}$ gegenüber einer Transformation der Gestalt (15), (16) invariant sind, erzeugen

$$\tilde\varphi(x) = x^a, \quad \tilde f_i(x) = k_i x^{b_i} \qquad (k_i = f_i(1),\ i=1,2,\ldots) \tag{49}$$

denselben Mittelwert, wie die Funktionen (48). Auf Grund von (35) hängt $f_i(t^{r_i}x)/f_i(x)$ nicht von i ab, also muß $b_i r_i = p$ (konstant) bzw. $b_i = p/r_i$ sein. Mit den Funktionen (49) bekommen wir wieder den Mittelwert (33). Damit haben wir den Satz 5 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications* (New York and London, 1966).

[2] J. Aczél—Z. Daróczy, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen,* **10** (1963), 171—190.

[3] M. Bajraktarevic, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes, *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.,* **13** (1958), 243—248.

[4] E. F. Beckenbach, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly,* **57** (1950), 1—6.

[5] J. M. Danskin, Dresher's inequality, *Amer. Math. Monthly,* **59** (1952), 687—688.

[6] Z. Daróczy, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte, *Monatshefte für Math.,* **68** (1964), 102—112.

[7] Z. Daróczy—L. Losonczi, Über den Vergleich von Mittelwerten, *Publ. Math. Debrecen,* **17** (1970), 289—297.

[8] M. Dresher, Moment spaces and inequalities, *Duke Math. J.,* **20** (1953), 261—271.

[9] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung.* I (Berlin, 1964).

[10] L. Losonczi, Über den Vergleich von Mittelwerten die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen,* **17** (1970), 203—208.

[11] L. Losonczi, Subadditive Mittelwerte, *Archiv der Math.,* **22** (1971) (im Druck).

(Eingegangen am 20. Dezember 1969)